View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk

brought to you by CORE

provided by Electronic archive of Tomsk Polytechnic University

УДК 514.76

ПОЛЯ ДВУМЕРНЫХ ПЛОЩАДОК МНОГООБРАЗИЯ ПРЯМЫХ В МНОГОМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Е.Т. Ивлев, Е.Д. Глазырина

Томский политехнический университет
E-mail: ged@tpu.ru

На m-мерном многообразии G_m^1 прямых l_1^n в n-мерном евклидовом пространстве E_n (m>2, n≥2m+1) аналитически и геометрически определяются два поля инвариантных двумерных площадок.

Ключевые слова:
Евклидово пространство, линейное отображение, условия Коши–Римана.

Key words:
Euclid's space, linear mapping, Cauchy–Riemann conditions.

Введение

Данная статья является продолжением статьи [1] и посвящена инвариантному нахождению полей двумерных площадок L_2^1 и Γ_2^1 в соответствующих m-плоскостях L_m и Γ_m, определяемых на m-мерном семействе G_m^1 прямых l_1^n в n-мерном евклидовом пространстве E_n (m>2, n≥2m+1).

Обозначения и терминология соответствуют принятым в [1–5].

1. Аналитический аппарат

Как и в [1], в данной статье рассматривается m-мерном семействе G_m^1 прямых l_1^n в n-мерном евклидовом пространстве E_n (n≥2m+1), отнесенном к подвижному ортонормальному реперу $R=(\bar{A},\bar{e}_i)$ с деривационными формулами и структурными уравнениями

$$d\bar{A}=\omega^i\bar{e}_i,\ \ d\bar{e}_i=\omega_i^j\bar{e}_j,$$

$$D\omega^i=\omega^k\wedge\omega_k^i,\ D\omega_i^k=\omega_i^j\wedge\omega_j^k,\ \ \omega_i^k+\omega_k^i=0. \quad (1)$$

Ортонормальный репер R выбирается и канонизируется так, что имеют место соотношения [1. Ур. (2, 14, 28)]. В результате этого на многообразии $G_m^1 \subset E_n$ имеют место дифференциальные уравнения [1. Ур. (3, 15, 29, 30)]. В терминах выбранного репера R на многообразии G_m^1 определены, в частности, m-плоскости

$$L_m=(\bar{A},\bar{e}_1,\bar{e}_2,\ldots,\bar{e}_m),\ \ \Gamma_m=(\bar{A},\bar{e}_{m+1},\ldots,\bar{e}_{2m}),$$

согласно [1. Ур. (17, 25, 31)].

В данной статье в соответствии с [1. Ур. (4)] и в дополнение к этому используется следующая система индексов при m>2, n≥2m+1:

$$i,j,k,l=\overline{1,n};\ \ a,b,c=\overline{1,n-1};\ \ \alpha,\beta,\gamma=\overline{1,m};$$
$$\hat{\alpha},\hat{\beta},\hat{\gamma}=\overline{m+1,n-1};\ \ f,g,h=\overline{m+1,2m};$$
$$\hat{\alpha}_1,\ \hat{\beta}_1,\ \hat{\gamma}_1=\overline{3,\ m}.$$

2. Поля двумерных площадок $L_2^1 \subset L_m$ и $\Gamma_2^1 \subset \Gamma_m$

2.1. Каждому элементу $l_1^n=(\bar{A},\bar{e}_n)\in G_m^1$ сопоставим двумерные площадки $L_2^1 \subset L_m$ и $\Gamma_2^1 \subset \Gamma_m$.

Двумерную площадку $L_2^1 \subset L_m=(\bar{A},\bar{e}_1,\bar{e}_2,\ldots,\bar{e}_m)$ определим следующим образом:

$$L_2^1=(\bar{A},\ \bar{\varepsilon}_1,\ \bar{\varepsilon}_2)\Leftrightarrow x^{\hat{\alpha}_1}=g_{\alpha_1}^{\hat{\alpha}_1}x^{\alpha_1},\ x^{\hat{\alpha}}=0,\ x^n=0;$$

$$\bar{\varepsilon}_{\alpha_1}=\bar{e}_{\alpha_1}+g_{\alpha_1}^{\hat{\alpha}_1}\bar{e}_{\hat{\alpha}_1},\ dg_{\alpha_1}^{\hat{\alpha}_1}+g_{\alpha_1}^{\hat{\beta}_1}\omega_{\hat{\beta}_1}^{\hat{\alpha}_1}-$$
$$-g_{\beta_1}^{\hat{\alpha}_1}\omega_{\alpha_1}^{\beta_1}+\omega_{\alpha_1}^{\hat{\alpha}_1}=g_{\alpha_1\alpha}^{\hat{\alpha}_1}\omega_n^{\alpha}. \quad (2)$$

В соответствии с (1) с двумерной площадкой L_2^1 ассоциируется (m–1)-плоскость, ортогональная L_2^1:

$$L_{m-2}^1=(\bar{A},\ \bar{\varepsilon}_3,\ldots,\ \bar{\varepsilon}_m)\perp L_2^1\Leftrightarrow x^{\hat{\alpha}_1}=g_{\hat{\alpha}_1}^{\alpha_1}x^{\hat{\alpha}_1},$$
$$x^{\hat{\alpha}}=0,\ x^n=0;$$
$$\bar{\varepsilon}_{\alpha_1}=\bar{e}_{\alpha_1}+g_{\alpha_1}^{\hat{\alpha}_1}\bar{e}_{\hat{\alpha}_1},\ dg_{\alpha_1}^{\hat{\alpha}_1}+$$
$$+g_{\alpha_1}^{\hat{\beta}_1}\omega_{\hat{\beta}_1}^{\hat{\alpha}_1}-g_{\beta_1}^{\hat{\alpha}_1}\omega_{\alpha_1}^{\beta_1}+\omega_{\alpha_1}^{\hat{\alpha}_1}=g_{\alpha_1\alpha}^{\hat{\alpha}_1}\omega_n^{\alpha}. \quad (3)$$

Двумерную площадку $\Gamma_2^1 \subset \Gamma_m=(\bar{A},\bar{e}_{m+1},\bar{e}_{m+2},\ldots,\bar{e}_{2m})$ определим следующим образом:

$$\Gamma_2^1=(\bar{A},\ \bar{\varepsilon}_{m+1},\ \bar{\varepsilon}_{m+2})\Leftrightarrow x^{m+\hat{\alpha}_1}=h_{m+\alpha_1}^{m+\hat{\alpha}_1}x^{m+\alpha_1},$$
$$x^{\alpha}=0,\ x^{\hat{f}}=0,\ x^n=0;$$
$$\bar{\varepsilon}_{m+\hat{\alpha}_1}=\bar{e}_{m+\alpha_1}+h_{m+\alpha_1}^{m+\hat{\alpha}_1}\bar{e}_{m+\hat{\alpha}_1};$$
$$dh_{m+\alpha_1}^{m+\hat{\alpha}_1}+h_{m+\alpha_1}^{m+\hat{\beta}_1}\omega_{m+\hat{\beta}_1}^{m+\hat{\alpha}_1}-h_{m+\beta_1}^{m+\hat{\alpha}_1}\omega_{m+\alpha_1}^{m+\beta_1}+\omega_{m+\alpha_1}^{m+\hat{\alpha}_1}=h_{m+\alpha_1\alpha}^{m+\hat{\alpha}_1}\omega_n^{\alpha}.(4)$$

Тогда в соответствии с (1) с двумерной площадкой Γ_2^1 ассоциируется (m-1)-плоскость, ортогональная Γ_{m-2}^1:

$$\Gamma_{m-2}^1=(\bar{A},\ \bar{\varepsilon}_{m+3},\ldots,\ \bar{\varepsilon}_{2m})\perp\Gamma_2^1\Leftrightarrow x^{m+\alpha_1}=h_{m+\hat{\alpha}_1}^{m+\alpha_1}x^{m+\hat{\alpha}_1},$$
$$x^{\alpha}=0,\ x^{\hat{f}}=0,\ x^n=0;$$
$$\bar{\varepsilon}_{m+\hat{\alpha}_1}=\bar{e}_{m+\hat{\alpha}_1}+h_{m+\hat{\alpha}_1}^{m+\alpha_1}\bar{e}_{m+\alpha_1},\ h_{m+\alpha_1}^{m+\hat{\alpha}_1}=-h_{m+\hat{\alpha}_1}^{m+\alpha_1}. \quad (5)$$

В следующих пунктах данного раздела в каждом элементе $l_1^n\in G_m^1$ будут выделены аналитически и геометрически двумерные площадки $L_2^1 \subset L_m$ и $\Gamma_2^1 \subset \Gamma_m$.

2.2. Инвариантная площадка $L_2^1 \subset L_m$.

В соответствии с [1. Ур. (20)] каждому элементу $l_1^n\in G_m^1 \subset E_n$ отвечает в m-плоскости L_m конус $\bar{Q}_{m-1}^2$, определяемый с учетом [1. Ур. (22)] уравнениями:

$$B_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta = 0,\ x^{\hat\alpha} = 0,\ x^n = 0. \qquad (6)$$

Здесь симметрические величины $B_{\alpha\beta}$ определяются по формулам и удовлетворяют соответствующим дифференциальным уравнениям:

$$B_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}B^\gamma_{(\alpha}\delta_{|\gamma|\beta)},\ dB_{\alpha\beta} - B_{\gamma\beta}\omega^\gamma_\alpha - B_{\alpha\gamma}\omega^\gamma_\beta = B_{\alpha\beta\gamma}\omega^\gamma_n, \quad (7)$$

причем явный вид величин $B_{\alpha\beta\gamma}$ несущественный. Имеет место следующая теорема.

Теорема 2.1. Каждому элементу $l_1^n \in G_m^1$ в общем случае отвечает конечное число двумерных площадок $L_2^1 \subset L_m$, сопряженных соответствующим $(m-2)$-плоскостям $L^1_{m-2} \perp L_2^1$ относительно конуса $\overline{Q}^2_{m-1} \in L_m$.

Доказательство. Из (2), (3), (6) и (7) следует, L_2^1 и L^1_{m-2} сопряжены относительно конуса $\overline{Q}^2_{m-1}$ тогда и только тогда, когда $k_1=2(m-2)$ величин $g^{\hat\alpha_1}_{\alpha_1} = -g^{\alpha_1}_{\hat\alpha_1}$ удовлетворяют следующим k_1 алгебраическим уравнениям:

$${}_{\alpha_1\hat\beta_1} \equiv B_{\hat\alpha_1\beta_1}g^{\hat\alpha_1}_{\alpha_1}g^{\beta_1}_{\hat\beta_1} + B_{\alpha_1\beta_1}g^{\beta_1}_{\hat\beta_1} + B_{\hat\alpha_1\hat\beta_1}g^{\hat\alpha_1}_{\alpha_1} + B_{\alpha_1\hat\beta_1} = 0. \quad (8)$$

Рассматривается якобиева матрица системы алгебраических уравнений (8):

$$\Psi_{k_1} = \left[\frac{\partial\psi_{\alpha_1\hat\beta_1}}{\partial g^{\hat\gamma_1}_{\gamma_1}}\right]. \qquad (9)$$

Подсчитаем ранг матрицы (9), например, при условии

$$g^{\hat\alpha_1}_{\alpha_1} = -g^{\alpha_1}_{\hat\alpha_1} = 0, \qquad (10)$$

в силу чего из (8) получаются соотношения

$$B_{\alpha_1\hat\beta_1} = 0. \qquad (11)$$

Из (9) с учетом (11) замечаем, что матрица Ψ имеет минор порядка $k_1=2(m-2)$:

$$\Psi = \det[B^{\gamma_1\hat\alpha_1}_{\hat\gamma_1\alpha_1}].$$

Здесь

$$B^{\gamma_1\hat\alpha_1}_{\hat\gamma_1\alpha_1} = B_{\alpha_1\beta_1}\delta^{\gamma_1\beta_1}\delta_{\hat\gamma_1\hat\beta_1} - B_{\hat\alpha_1\hat\beta_1}\delta^{\gamma_1}_{\alpha_1}\delta^{\hat\alpha_1}_{\hat\gamma_1}, \qquad (12)$$

причем значения индексов $\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \hat\gamma_1\end{pmatrix}$ указывают на номера строк, а значения индексов $\begin{pmatrix}\hat\alpha_1\\ \alpha_1\end{pmatrix}$ – на номера столбцов определителя Ψ.

Полагая, например, $B_{\alpha\beta}=0$ при $\alpha\neq\beta$, с учетом (12) и [1. Ур. (21, 22)] можно убедиться в том, что

$$\Psi = B_{11}B_{22}\ldots B_{mm} = (A_1^1A_2^2\ldots A_m^m)^{-1} \neq 0,$$

поскольку в этом случае $A^\beta_\alpha=0$ при $\alpha\neq\beta$. Поэтому в общем случае определитель Ψ порядка k_1 не равен нулю на многообразии G_m^1. Следовательно, ранг матрицы (9) в общем случае равен $k_1=2(m-2)$. Это означает, что система (8) состоит из алгебраически независимых уравнений, а потому имеет конечное число решений относительно $g^{\hat\alpha_1}_{\alpha_1} = -g^{\alpha_1}_{\hat\alpha_1}$. Теорема 2.1 доказана.

Замечание 2.1. Из (7) с учетом [1. Ур. (22)] следует, что

$$B_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(A^\beta_\alpha + A^\alpha_\beta). \qquad (13)$$

Проведем такую канонизацию ортонормального репера R на многообразии $G_m^1 \subset E_n$, при которой с учетом (13) имеют место (11), а $\Psi\neq0$, т. е.

$$A^{\hat\alpha_1}_{\alpha_1} + A^{\alpha_1}_{\hat\alpha_1} = 0, \ \text{а} \ \ \Psi \neq 0. \qquad (14)$$

Из дифференциальных уравнений (7) заключаем, что на многообразии G_m^1 с учетом (14) и [1. Ур. (3), (15)] выполняются дифференциальные уравнения:

$$\omega^{\hat\alpha_1}_{\alpha_1} = A^{\hat\alpha_1}_{\alpha_1\alpha}\omega^\alpha,$$

$$dA^{\hat\alpha_1}_{\alpha_1\alpha} + A^{\hat\beta_1}_{\alpha_1\alpha}\omega^{\hat\alpha_1}_{\hat\beta_1} - A^{\hat\alpha_1}_{\beta_1\alpha}\omega^{\beta_1}_{\alpha_1} - A^{\hat\alpha_1}_{\alpha_1\beta}\omega^\beta_\alpha = A^{\hat\alpha_1}_{\alpha_1\alpha\beta}\omega^\beta. \quad (15)$$

Здесь явный вид величин $A^{\hat\alpha_1}_{\alpha_1\alpha\beta}$ несущественный. Из (15) с учетом (1) замечаем, что

$$\omega^{\alpha_1}_{\hat\alpha_1} = A^{\alpha_1}_{\hat\alpha_1\alpha}\omega^\alpha = -\omega^{\hat\alpha_1}_{\alpha_1} \Rightarrow A^{\alpha_1}_{\hat\alpha_1\alpha} = -A^{\hat\alpha_1}_{\alpha_1\alpha}.$$

В соответствии с [2] и с учетом (15) делаем вывод о том, что канонизация ортонормального репера R типа (14) на многообразии $G_m^1 \subset E_n$ при $n\geq2m+1$ в общем случае существует.

Из (2), (3), (10) и (11) следует, что теперь

$$L_2^1 = (\overline{A},\ \overline{e}_1,\ \overline{e}_2),\ \ L^1_{m-2} = (\overline{A},\ \overline{e}_3,\ldots,\ \overline{e}_m). \qquad (16)$$

2.3. Двумерная площадка $\Gamma_2^1 \subset \Gamma_m$ Коши–Римана.

Из [1. Ур. (9, 23)] следует, что направление

$$v = (\overline{B}, \overline{e}_\alpha)v^\alpha \in L^1_m \qquad (17)$$

с учетом [1. Ур. (16, 21, 22)] при отображении $\Pi=\{A^\beta_\alpha\}$: $L_m^1 \to L_m$ переходит в направление

$$x = (\overline{A}, \overline{e}_\beta)A^\beta_\alpha v^\alpha = x^\beta(\overline{A},\ \overline{e}_\beta) \in L_m, \qquad (18)$$

откуда получаем

$$x^\beta = A^\beta_\alpha v^\alpha \Rightarrow v^\alpha = B^\alpha_\beta x^\beta. \qquad (19)$$

Из (16)–(19) следует, что

$$x \in L^1_{m-2} \Leftrightarrow x^{\hat\alpha_1} = 0 \Leftrightarrow v^{\hat\alpha_1} = 0 \Leftrightarrow v \in \overset{*}{L}{}^1_{m-2} =$$
$$= (\overline{B},\ \overline{e}_1,\ldots,\ \overline{e}_m), \qquad (20)$$

где

$$\overset{*}{L}{}^1_{m-2} = \Pi^{-1}L^1_{m-2}. \qquad (21)$$

Каждому элементу $l_1^n \in G_m^1$ в двумерных площадках $L_2^1 \subset L_m$ и $\Gamma_2^1 \subset \Gamma_m$ сопоставим с учетом (4), (5) и (16) точки X и Y с радиус-векторами

$$\overline{X} = \overline{A} + x^{\alpha_1}\overline{e}_{\alpha_1},\ \ \overline{Y} = \overline{A} + y^{m+\beta_1}\overline{\varepsilon}_{m+\beta_1}. \qquad (22)$$

Отсюда с учетом (16) и [1. Ур. (1, 3, 9, 15)] получаем

$$\frac{d\overline{X}}{\theta} = (\cdots)^\alpha\overline{e}_\alpha + (A^{m+\alpha}_\beta + x^{\alpha_1}A^{m+\alpha}_{\alpha_1})\overline{e}_{m+2} +$$
$$+(\cdots)^{\hat f}\overline{e}_{\hat f} + (\cdots)^n\overline{e}_n. \qquad (23)$$

Из (22) и (23) с учетом (2), (3) и [1. Ур. (9)] получаем, что с каждым фиксированным направлением $v=(\overline{B},\overline{e}_\alpha)\ v^\alpha \in L_m^1$, соответствующим элементу $l_1^n \in G_m^1$ ассоциируется отображение

$$F_v : L_2^1 \to \Gamma_2^1, \tag{24}$$

определяемое уравнениями

$$y^{m+\beta_1} = \lambda(x^{\alpha_1} G_{\alpha_1 \alpha}^{m+\beta_1} + G_{\alpha}^{m+\beta_1}) v^{\alpha}, \tag{25}$$

где v^α – фиксированы, а величины $G_{\alpha_1\alpha}^{m+\beta_1}$ и $G_{\alpha}^{m+\beta_1}$ удовлетворяют соотношениям:

$$G_{\alpha_1\alpha}^{m+\beta_1} = A_{\alpha_1\alpha}^{m+\beta_1} + h_{m+\widehat{\beta}_1}^{m+\beta_1} A_{\alpha_1\alpha}^{m+\widehat{\beta}_1},$$

$$G_{\alpha}^{m+\beta_1} = A_{\alpha}^{m+\beta_1} + h_{m+\widehat{\beta}_1}^{m+\alpha_1} A_{\alpha}^{m+\widehat{\beta}_1}. \tag{26}$$

По аналогии с [3. С. 6] и [4. Ур. (15)] отображение (27) с учетом [1. Ур. (9, 25, 28)] геометрически означает, что

$$Y = F_v X = \Gamma_2^1 \cap \{T(X)_v \cup L_m \cup \Gamma_{m-2}^1 \cup \Gamma_{n-2m}\}.$$

Здесь $T(X)_v$ означает касательную к нефокальной, в смысле [1], линии $(X)_v$, описываемой точкой X в направлении $v=(\bar{B},\bar{e}_\alpha)$ $v^\alpha \in L_m^1$.

Определение 2.1. Отображение F_v: $L_2^1 \to \Gamma_2^1$, отвечающее элементу $l_1^n \in G_m^1 \subset E_n$ при каждом фиксированном направлении $v=(\bar{B},\bar{e}_\alpha)$ $v^\alpha \in L_m^1$, называется отображением Коши–Римана или $F_v \to F_v$ (*К.–Р.*), если определяющие его функции удовлетворяют условиям Коши–Римана [5. С. 188–189]:

$$\frac{\partial y^{m+1}}{\partial x^1} = \frac{\partial y^{m+2}}{\partial x^2}, \ \frac{\partial y^{m+2}}{\partial x^1} = -\frac{\partial y^{m+1}}{\partial x^2}. \tag{27}$$

Если эти условия выполняются при любых направлениях $v \in L_m^1$, то отображение F_v называется аналитическим или отображением $F_v \to F_v$ (*К.–Р.*).

Определение 2.2. Двумерная площадка $\Gamma_2^1 \subset \Gamma_m$, отвечающая в каждом элементе $l_1^n \in G_m^1 \subset E_n$ двумерной плоскости $L_2^1 \subset L_m$ при отображениях $F_v \to F_v$ (*К.–Р.*) при всех направлениях $v \in \overset{*}{L}{}_{m-2}^1 \subset L_m^1$, называется двумерной площадкой Коши–Римана.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2.2. Каждому элементу $l_1^n \in G_m^1 \subset E_n$ в общем случае отвечает в Γ_m единственная двумерная плоскость Γ_2^1 Коши–Римана, соответствующая площадке $L_2^1 \subset L_m$.

Доказательство. Из (25) и (27) в соответствии с определением 2.1 отображение (24) будет при каждом фиксированном направлении $v \in L_m^1$, отвечающим элементу $l_1^n \in G_m^1$, будет отображением $F_v \to F_v$ (*К.–Р.*) тогда и только тогда, когда выполняются на многообразии $G_m^1 \subset E_n$ следующие соотношения:

$$(G_{1\alpha}^{m+1} - G_{2\alpha}^{m+2}) v^\alpha = 0, \ (G_{1\alpha}^{m+2} + G_{2\alpha}^{m+1}) v^\alpha = 0. \tag{28}$$

В соответствии с определением 2.2 из (28) с учетом (26), (20) и (21) следует, что двумерная площадка $\Gamma_2^1 \subset \Gamma_m$ будет двумерной площадкой Коши–Римана тогда и только тогда, когда величины $h_{m+\alpha_1}^{m+\widehat{\alpha}_1} = -h_{m+\widehat{\alpha}_1}^{m+\alpha_1}$, общее число которых равно $k_1=2(m-2)$, удовлетворяют в общем случае следующей системе нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} A_{1\widehat{\alpha}_1}^{m+\widehat{\beta}_1} h_{m+\beta_1}^{m+1} - A_{2\widehat{\alpha}_1}^{m+\widehat{\beta}_1} h_{m+\beta_1}^{m+2} = A_{2\widehat{\alpha}_1}^{m+2} - A_{1\widehat{\alpha}_1}^{m+1}, \\ A_{2\widehat{\alpha}_1}^{m+\widehat{\beta}_1} h_{m+\beta_1}^{m+1} + A_{1\widehat{\alpha}_1}^{m+\widehat{\beta}_1} h_{m+\beta_1}^{m+2} = -A_{2\widehat{\alpha}_1}^{m+1} - A_{1\widehat{\alpha}_1}^{m+2}. \end{cases} \tag{29}$$

Основным определителем D_{k_1} порядка k_1 системы (29) является определитель:

$$D_{k_1} = \begin{vmatrix} A_{13}^{m+3} & \cdots & A_{1,m}^{m+3} & -A_{23}^{m+3} & \cdots & -A_{2,m}^{m+3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{13}^{2m} & \cdots & A_{1,m}^{2m} & -A_{23}^{2m} & \cdots & -A_{2,m}^{2m} \\ A_{23}^{m+3} & \cdots & A_{2,m}^{m+3} & A_{13}^{m+3} & \cdots & A_{1,m}^{m+3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{23}^{2m} & \cdots & A_{2,m}^{2m} & A_{13}^{2m} & \cdots & A_{1,m}^{2m} \end{vmatrix}.$$

Здесь в величинах $A_{\alpha_1,m}^{m+\widehat{\alpha}_1}$ запятая в нижних индексах ставится для того, чтобы первый индекс отличать от второго, равного m во избежание путаницы с верхним индексом $m+\widehat{\alpha}_1$ преимущественно при $\widehat{\alpha}_1=m$.

Положив, например, $A_{2\widehat{\alpha}_1}^{m+\widehat{\beta}_1} = 0$, $A_{1\widehat{\alpha}_1}^{m+\widehat{\beta}_1} = \delta_{\widehat{\alpha}_1}^{\widehat{\beta}_1}$, мы убеждаемся в том, что определитель D_{k_1} равен 1. Поэтому основной определитель D_{k_1} тождественно не равен нулю на многообразии G_m^1. Следовательно, система (29) в силу теоремы Крамера имеет конечное число решений относительно $h_{m+\alpha_1}^{m+\widehat{\alpha}_1} = -h_{m+\widehat{\alpha}_1}^{m+\alpha_1}$.

Теорема 2.2 доказана.

Проведем на многообразии G_m^1 такую канонизацию ортонормального репера R, при которой

$$A_{2\widehat{\alpha}_1}^{m+2} - A_{1\widehat{\alpha}_1}^{m+1} = 0, \ A_{1\widehat{\alpha}_1}^{m+1} + A_{1\widehat{\alpha}_1}^{m+2} = 0, \ D_{k_1} \neq 0. \tag{30}$$

Тогда из [1. ур. (1), (3), (16)] с учетом (30) замечаем, что на многообразии $G_m^1 \subset E_n$ при $m>2$, $n2m+1$ имеют место дифференциальные уравнения:

$$\omega_{\alpha_1+m}^{m+\widehat{\beta}_1} = -\omega_{m+\widehat{\beta}_1}^{\alpha_1+m} = -A_{m+\widehat{\beta}_1,\alpha}^{\alpha_1+m} \omega_n^\alpha =$$

$$= A_{m+\alpha_1,\alpha}^{m+\widehat{\beta}_1} \omega_n^\alpha \Rightarrow -A_{m+\widehat{\beta}_1,\alpha}^{\alpha_1+m} = A_{m+\alpha_1,\alpha}^{m+\widehat{\beta}_1};$$

$$dA_{m+\alpha_1,\alpha}^{m+\widehat{\beta}_1} + A_{m+\alpha_1,\alpha}^{m+\hat{\gamma}_1} \omega_{m+\hat{\gamma}_1}^{m+\widehat{\beta}_1} - A_{m+\beta_1,\alpha}^{m+\widehat{\beta}_1} \omega_{m+\alpha_1}^{m+\beta_1} -$$

$$-A_{m+\alpha_1,\beta}^{m+\widehat{\beta}_1} \omega_\alpha^\beta = A_{m+\alpha_1,\alpha\beta}^{m+\widehat{\beta}_1} \omega_n^\beta;$$

$$\omega_2^{m+2} - \omega_1^{m+1} = (A_{2\alpha_1}^{m+2} - A_{1\alpha_1}^{m+1}) \omega_n^{\alpha_1};$$

$$\omega_2^{m+1} + \omega_1^{m+2} = (A_{2\alpha_1}^{m+1} + A_{1\alpha_1}^{m+1} 2) \omega_n^{\alpha_1}. \tag{31}$$

Здесь явный вид величин несущественный. Из (31) в соответствии с [2] заключаем, что канонизация репера R типа (30) на многообразии G_m^1 в общем случае существует. Из (29) в силу (30) следует, что при указанном выборе репера R на многообразии G_m^1 величины $h_{m+\alpha_1}^{m+\widehat{\alpha}_1} = -h_{m+\widehat{\alpha}_1}^{m+\alpha_1} = 0$. Геометрически это означает, что в силу (2) и (3) теперь в m-плоскости Γ_m имеем:

$$\Gamma_2^1 = (\bar{A}, \bar{e}_{m+3}, \bar{e}_{m+4}), \ \Gamma_{m-2}^1 = (\bar{A}, \bar{e}_{m+5}, \ldots, \bar{e}_{2m}). \tag{32}$$

Замечание 2.2. Двумерные площадки (16) и (32), определенные в каждом элементе $l_1^n \in G_m^1$, будут использованы при одной из возможных классификаций многообразий G_m^1. Это будет предметом особого рассмотрения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ивлев Е.Т., Глазырина Е.Д. Многообразие прямых в многомерном евклидовом пространстве // Известия Томского политехнического университета. – 2011. – Т. 319. – № 2. – С. 5–8.
2. Ивлев Е.Т., Глазырина Е.Д. Распределение двумерных плоскостей в четырехмерном евклидовом пространстве // Известия Томского политехнического университета. – 2003. – Т. 306. – № 6. – С. 5–7.
3. Ивлев Е.Т., Молдованова Е.А. О дифференцируемых отображениях аффинных пространств в многообразия m-плоскостей в многомерном евклидовом пространстве // Известия вузов. Математика. – 2009. – № 11. – С. 24–42.
4. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Физматгиз, 1958. – 687 с.
5. Остиану Н.М. О канонизации подвижного репера погруженного многообразия // Rev. math. pures et appl. (RNR). – 1962. – № 2. – P. 231–240.

Поступила 10.03.2011 г.

УДК 517.54

УСИЛЕНИЕ ТЕОРЕМ ИСКАЖЕНИЯ

Л.М. Бер

Томский политехнический университет
E-mail: berlm@tpu.ru

Для однолистных функций с симметрией вращения получены оценки, обобщающие теоремы Г.М. Голузина об искажении хорд.

Ключевые слова:
Однолистные функции, симметрия вращения, искажение хорд, оценки.
Key words:
Schlicht functions, symmetry of rotation, Distortion of chords, estimations.

§ 1. Области с разрезами

Пусть $D, 0\in D$, – односвязная область. Пусть $S(n)$, $n\in N$, – класс голоморфных однолистных в единичном круге $E=\{z:|z|<1\}$ функций $f(z)$, нормированных условиями $f(0)=0$, $f'(0)=1$ и отображающих этот круг на область D_0, полученную из D исключением n $(n\in N)$ простых непересекающихся жордановых дуг.

Пусть $S'(n)$ – подкласс класса $S(n)$ тех функций, которые отображают единичный круг на плоскость с разрезом по простой жордановой дуге, идущей в бесконечность. Согласно [1] любую функцию класса $S(n)$ можно записать в виде предела последовательности функций подкласса $S'(n)$, в котором каждая функция $\tilde{f}(z)$ представима в E в виде

$$\tilde{f}(z)=\lim_{\tau\to\infty} e^{\tau} f(z,\tau), \tag{1}$$

где $f(z,\tau)$, как функция от z, голоморфна и однолистна в круге E, $|f(z,\tau)|<1$ в E и $f(0,\tau)=0$, $f_z'(0,\tau)=1$, а, как функция от τ $(0\le\tau<\infty)$, является решением дифференциального уравнения Левнера

$$\frac{df}{dz}=-f\sum_{k=1}^{n}\delta_k(\tau)\frac{\mu_k(\tau)+f}{\mu_k(\tau)-f},$$

удовлетворяющим начальному условию

$$f(z,0)=z.$$

Здесь $\mu_k(\tau)$ – управляющие функции, кусочно-непрерывные и по модулю равные единице в промежутке $0\le\tau<\infty$.

Пусть $f(z)\in S'(n)$ и $f(z,\tau)$ – функция, соответствующая $f(z)$. Для любых точек z_ν, $\nu=1,\ldots,n$, $n\ge1$ положим для краткости $f_\nu=f(z_\nu,\tau)$.

Непосредственным вычислением получаем следующие равенства при $n\ge1$:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\ln\left[e^{-\tau n}\frac{f_\nu^n-f_{\nu'}^n}{f_\nu^n f_{\nu'}^n}\right]=$$

$$=-n+\frac{nf_\nu^{n-1}}{f_\nu^n-f_{\nu'}^n}\frac{\partial f_\nu}{\partial\tau}-\frac{nf_{\nu'}^{n-1}}{f_\nu^n-f_{\nu'}^n}\frac{\partial f_{\nu'}}{\partial\tau}-\frac{n}{f_\nu}\frac{\partial f_\nu}{\partial\tau}-\frac{n}{f_{\nu'}}\frac{\partial f_{\nu'}}{\partial\tau},$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\ln\left[1-f_\nu^n\overline{f}_{\nu'}^n\right]=-n\frac{f_\nu^{n-1}f_{\nu'}^{n-1}}{1-f_\nu^n\overline{f}_{\nu'}^n}\left[f_\nu\frac{\partial f_{\nu'}}{\partial\tau}+f_{\nu'}\frac{\partial f_\nu}{\partial\tau}\right].$$

Используя уравнение Левнера, получим

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\ln\left[e^{-\tau}\frac{f_\nu-f_{\nu'}}{f_\nu f_{\nu'}}\right]=$$

$$=-2f_\nu\overline{f}_{\nu'}\sum_{k=1}^{n}\frac{\delta_k(\tau)}{(\mu_k(\tau)-f_\nu)(\mu_k(\tau)-f_{\nu'})}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\ln\left[e^{-\tau n}\frac{f_\nu^n-f_{\nu'}^n}{f_\nu^n f_{\nu'}^n}\right]=$$

$$=2nf_\nu f_{\nu'}\sum_{k=1}^{n}\frac{\delta_k(\tau)}{(\mu_k-f_\nu)(\mu_k-f_{\nu'})}\times$$

$$\times\left[\frac{\mu_k(\tau)(f_\nu^{n-1}-f_{\nu'}^{n-1})}{f_\nu^n-f_{\nu'}^n}-\frac{1}{2}\right],\ n\ge2, \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\ln[1-f_\nu^n\overline{f}_{\nu'}^n]=2nf_\nu^n\overline{f}_{\nu'}^n\frac{1-f_\nu\overline{f}_{\nu'}}{1-f_\nu^n\overline{f}_{\nu'}^n}\times$$

$$\times\sum_{k=1}^{n}\frac{\delta_k(\tau)}{(\mu_k(\tau)-f_\nu)\overline{(\mu_k(\tau)-f_{\nu'})}},\ n\ge1. \tag{4}$$